

# ALGORITMOS EFICACES PARA LA EVALUACIÓN DE LAS DEFORMACIONES Y DE LAS TENSIONES EN SECCIONES RECTANGULARES DE HORMIGÓN ARMADO EN ESTADOS DE NO AGOTAMIENTO<sup>1</sup>

(EFFICIENT ALGORITHM FOR STRESS-STRAIN EVALUATION IN RECTANGULAR SECTIONS OF REINFORCED CONCRETE IN NOT ULTIMATE LIMIT STATE).

Elvira Sánchez Espinosa, Dr. Ing. Agrónomo

Profesores del Dpto. de Construcción y Vías Rurales.  
UNIVERSIDAD POLITECNICA DE MADRID. ESPAÑA

Director de Tesis:

Miguel A. Garcimartín Molina, Dr. Ing. Agrónomo

Fecha de recepción: 2-VII-91  
400-24

## RESUMEN

*En esta Tesis se desarrolla un algoritmo matemático y su correspondiente aplicación informática que permite abordar el cálculo de las tensiones y de las deformaciones en secciones rectangulares de hormigón armado cuando éstas están sometidas a esfuerzos normales de no agotamiento. El procedimiento de cálculo se basa en el modelo parábola-rectángulo recomendado por Model Code y la EH-88 y aplicado en la mayor parte de los países occidentales.*

*Se han obtenido conclusiones que muestran la eficacia del algoritmo propuesto analizando casos reales, y se puede afirmar que este trabajo constituye una aportación original en el estudio teórico de las secciones de hormigón armado.*

## SUMMARY

*In this thesis an algorithm and its informatic application is developed in order to determine the stress-strain in rectangular sections of reinforced concrete when these are subjected to not ultimate forces. This is based on a parabolic-rectangular model, recommended by the Commission of the European Communities which is applied in most Western countries.*

*Conclusions have been obtained which show the efficiency of the proposed algorithm in the analysis of real cases. This study is an original contribution in the theoretical research of reinforced concrete sections.*

## INTRODUCCIÓN

El procedimiento usual de cálculo de secciones rectangulares de hormigón armado sometidas a sollicitaciones normales es la búsqueda de las dimensiones de la sección y cuantías de armadura que proporcionan el equilibrio de fuerzas y momentos, y que hacen que la sección se encuentre en un estado límite de agotamiento. Los valores de las cuantías son en general teóricos realizándose después un armado por exceso, con los tamaños y número de redondos reales. Así se está sobre una curva real envolvente de la teórica que, en principio, nos sitúa dentro de la seguridad.

Cuando se desea comprobar esa sección para otros esfuerzos diferentes será necesario representar la curva de esfuerzos últimos de agotamiento de la sección y comprobar que aquéllos se encuentran encerrados dentro de ella. El procedimiento es correcto, pero no dice nada acerca del comportamiento de la sección; no proporciona información acerca del estado tensional, ni el estado de deformación de la misma.

La búsqueda de un método para la determinación de las tensiones y deformaciones en secciones de hormigón armado es el objetivo de esta Tesis. El desarrollo de un algoritmo matemático eficaz y su correspondiente aplicación informática que permita abordar el problema para su empleo en casos reales constituyen el objeto de la misma.

1) Tesis leída en la E.T.S. de Ingenieros Agrónomos el 14 de junio de 1991, con calificación Apto Cum Laude.

## FUNDAMENTOS E HIPÓTESIS BÁSICAS

Se admiten, en este trabajo, las características del acero y del hormigón propuestas en la Instrucción Española para el Proyecto y la Ejecución de Obras de Hormigón en Masa o Armado (EH-88) y, como hipótesis básicas, se adoptan la de Bernuilli (secciones planas) y la de compatibilidad de las deformaciones.

## PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Para comprobar una sección rectangular de hormigón con armadura real basta plantear y resolver las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad correspondientes y calcular el axil y el momento que ésta es capaz de soportar. Si ambos esfuerzos se encuentran por encima de las solicitaciones aplicadas el dimensionamiento de la sección se considera correcto. Sin embargo el estado de deformación en que se encuentra dicha sección puede no ser un estado límite último.

Cuando ocurre esto se dice que la sección se encuentra en un **Estado de No Agotamiento** (ENA) que se define como todo estado de deformación no contenido en ninguno de los Dominios de la Deformación correspondientes a los Estados Límites de Agotamiento (ELA) (Fig. 1) que son los conjuntos de rectas que pivotan en los puntos **A**, **B**, y **C**.

En la figura 1 se representa el diagrama de deformación correspondiente a una sección rectangular, sometida a solicitaciones normales (axil y momento), armada con dos armaduras  $A_{s1}$  y  $A_{s2}$ . La sección queda definida geoméricamente con un canto total  $h$ , canto útil  $d$  y recubrimiento mecánico  $d'$  con respecto de la armadura  $A_{s2}$  igual al recubrimiento mecánico  $d''$  con respecto de la armadura  $A_{s1}$ .

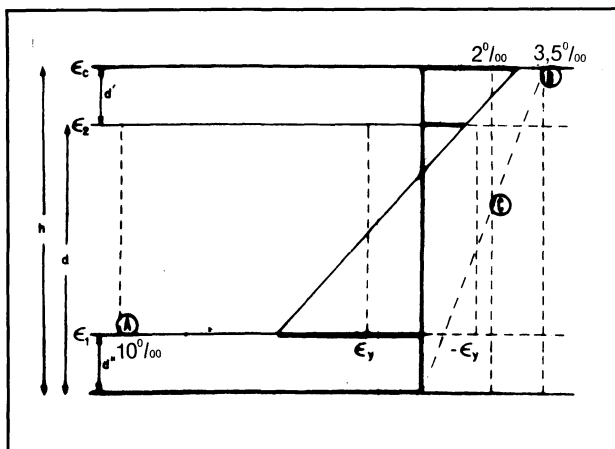


Fig. 1

Para la representación del diagrama de deformaciones correspondiente a un diagrama de esfuerzos, se adopta el de la EH-88 de los dominios, considerando las deformaciones de compresión a la derecha y las de tracción a la izquierda de la sección.

No se considera ninguna restricción en cuanto al tipo de acero empleado, ni en cuanto a los coeficientes de minoración de resistencia elegidos.

El estado de deformación y de tensión de la sección se resuelve, en todos los casos, determinando tres incógnitas en un sistema de tres ecuaciones. Las incógnitas son:

- $\sigma_c$  = tensión en el hormigón.
- $\sigma_1$  = tensión en la armadura principal.
- $x$  = profundidad de la fibra neutra.

Y las ecuaciones se refieren, como es sabido, a:

- equilibrio de fuerzas,
- equilibrio de momentos,
- compatibilidad de las deformaciones.

El sistema es no lineal y generalmente de grado superior (en determinados casos de grado cinco), por lo que para su resolución debe recurrirse al cálculo numérico. En esta Tesis se ha abordado la resolución por el método de aproximaciones sucesivas.

Los sistemas de ecuaciones que se plantean para cada **Estado de No Agotamiento** se han agrupado en función de la posición de la fibra neutra, siendo éstos los siguientes:

a) Posición de la fibra neutra:  $-\infty < x \leq 0$

- Estado tensional traccionado en ambas armaduras.
- No se considera la contribución del hormigón en tracción.

$$N - A_{s1} \cdot \sigma_{s1} - A_{s2} \cdot \sigma_{s2} = 0$$

$$N \cdot e_1 - A_{s2} \cdot \sigma_{s2} \cdot (d - d') = 0$$

$$\frac{e_1}{x - d} = \frac{e_2}{x - d'}$$

b) Posición de la fibra neutra:  $0 < x \leq d'$

- Estado tensional traccionado en ambas armaduras.

- Estado tensional comprimido en las fibras de hormigón por encima de la fibra neutra.

$$N + a_{...} \cdot b - A_{s1} \cdot \sigma_{s1} - A_{s2} \cdot \sigma_{s2} = 0$$

$$N \cdot e_1 - a_{...} \cdot b \cdot [g_{...} + (d-x)] + A_{s2} \cdot \sigma_{s2} \cdot (d-d') = 0$$

$$\frac{e_1}{x-d} = \frac{e_2}{x-d'} = \frac{e_c}{x} = \frac{-0.002}{t}$$

Posición de la fibra neutra:  $d' < x \leq d$

- Estado tensional traccionado para la armadura  $A_{s1}$ .
- Estado tensional comprimido para la armadura  $A_{s2}$ .
- Estado tensional comprimido para las fibras de hormigón por encima de la fibra neutra.

$$N + a_{...} \cdot b + A_{s1} \cdot \sigma_{s1} + A_{s2} \cdot \sigma_{s2} = 0$$

$$N \cdot e_1 - a_{...} \cdot b \cdot [g_{...} + (d-x)] - A_{s2} \cdot \sigma_{s2} \cdot (d-d') = 0$$

$$\frac{e_1}{x-d} = \frac{e_2}{x-d'} = \frac{e_c}{x} = \frac{-0.002}{t}$$

Posición de la fibra neutra:  $d < x \leq h$

- Estado tensional comprimido en ambas armaduras.
- Estado tensional comprimido para las fibras de hormigón por encima de la fibra neutra.

$$N + a_{...} \cdot b - A_{s1} \cdot \sigma_{s1} + A_{s2} \cdot \sigma_{s2} = 0$$

$$N \cdot e_1 - a_{...} \cdot b \cdot [g_{...} + (d-x)] - A_{s2} \cdot \sigma_{s2} \cdot (d-d') = 0$$

$$\frac{e_1}{x-d} = \frac{e_2}{x-d'} = \frac{e_c}{x} = \frac{-0.002}{t}$$

Posición de la fibra neutra:  $h < x < +\infty$

- Estado tensional comprimido para todas las fibras de la sección, tanto armaduras como hormigón.

$$N + b_{...} \cdot b + A_{s1} \cdot \sigma_{s1} + A_{s2} \cdot \sigma_{s2} = 0$$

$$N \cdot e_1 - b_{...} \cdot b \cdot [g_{...} + (d-x)] - A_{s2} \cdot \sigma_{s2} \cdot (d-d') = 0$$

$$\frac{e_1}{x-d} = \frac{e_2}{x-d'} = \frac{e_c}{x} = \frac{-0.002}{t} = \frac{e'_c}{x-h}$$

En donde:

- Las tensiones  $\sigma_{s1}$  y  $\sigma_{s2}$  se expresan en valores absolutos.

- $a_{...}$  y  $b_{...}$  representan el prisma de tensiones del hormigón en los diferentes casos que pueden presentarse:

- deformado en zona de parábola:  
a1 ( $0 < x < h$ ) ó b1 ( $x > h$ )
- deformado en zona de rectángulo:  
a2 ( $0 < x < h$ ) ó b2 ( $x > h$ )

- $[g_{...} + (d-x)]$  representan la distancia desde el centro de gravedad del prisma de tensiones a la armadura  $A_{s1}$ .

## CAMPOS DE ESTADO DE NO AGOTAMIENTO

Debido a la complejidad de los casos que pueden presentarse en **Estados de No Agotamiento** y para un análisis pormenorizado de cada uno de ellos se han dividido éstos en Campos, definiéndose

**CAMPO** como el conjunto de **Estados de No**

**Agotamiento** que cumplen unas determinadas condiciones referidas, en general, a intervalos de deformación de las armaduras y del hormigón. Son pues conjuntos de rectas que se apoyan en dos segmentos o que pivotan alrededor de un punto fijo apoyándose el otro extremo en un segmento.

Todos los campos se definen en función del estado de deformación de las armaduras y del hormigón, obteniéndose los límites para cada uno de ellos en función de los valores de la relación  $d'/d$ , valores que denominamos Frontera, y de las características resistentes del acero.

Las combinaciones viables de los posibles estados de deformación de ambas armaduras y del hormigón hacen que el número total de campos a analizar sea de 30.

A título de ejemplo, para este resumen, se incluye el **campo 8** (Figs. 2 a 5).

### Situación de la deformación:

$A_{s1}$ : traccionada en zona elástica.

$A_{s2}$ : comprimida en zona elástica.

Hormigón: comprimido en zona de parábola.

Posición línea neutra:  $d' < x < d$

### Ecuaciones:

$$N + a1 - e_1 \cdot E \cdot A_{s1} - e_2 \cdot E \cdot A_{s2} = 0$$

$$N \cdot e - a1 \cdot g1 + e_2 \cdot E \cdot A_{s2} \cdot (d-d') = 0$$

$$\frac{e_1}{x-d} = \frac{e_2}{x-d'} = \frac{e_c}{x} = \frac{-0.002}{t}$$

<http://informesdelaconstruccion.revistas.csic.es>

## Subcampo 8a

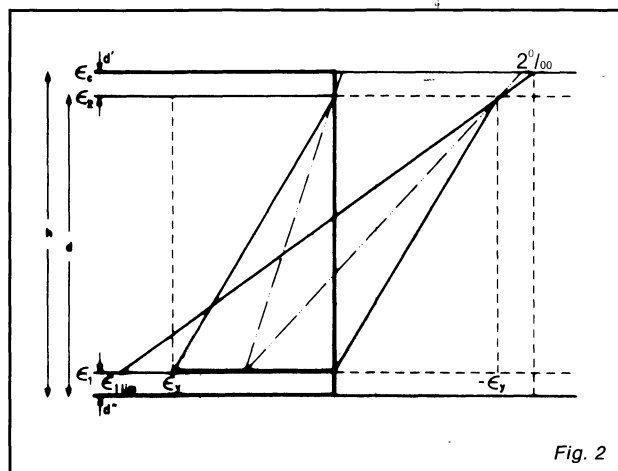


Fig. 2

Límites:

$$e_y \geq e_1 > 0 \quad 0 > e_2 \geq -e_y \quad -0.002 \leq e_c < \frac{-d'}{d-d'} e_1$$

## 8b2

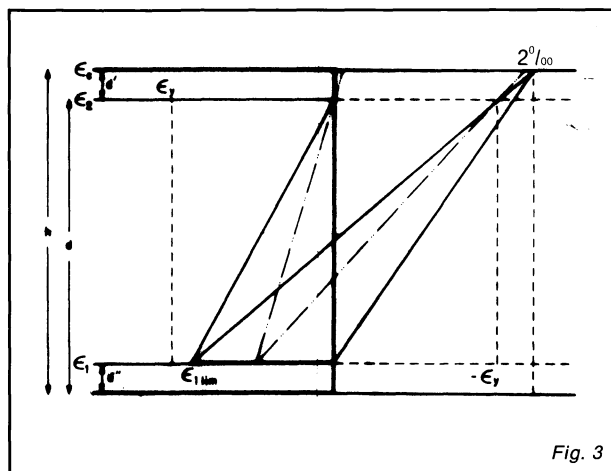


Fig. 3

Límites:

$$e_{1lim} > e_1 > 0, \quad 0 > e_2 \geq -e_y \quad -0.002 \leq e_c \leq \frac{-d'}{d-d'} e_1$$

## Subcampo 8b

## 8b1

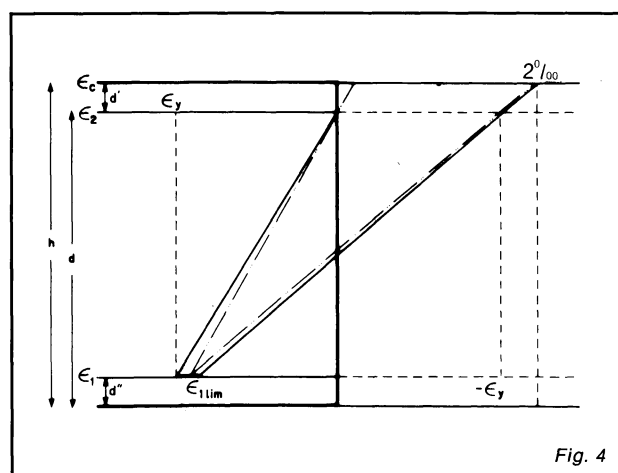


Fig. 4

Límites:

$$e_y \geq e_1 \geq e_{1lim} \quad 0 > e_2 \geq e_{2lim1} \quad -0.002 \leq e_c < \frac{-d'}{d-d'} e_1$$

## Subcampo 8c

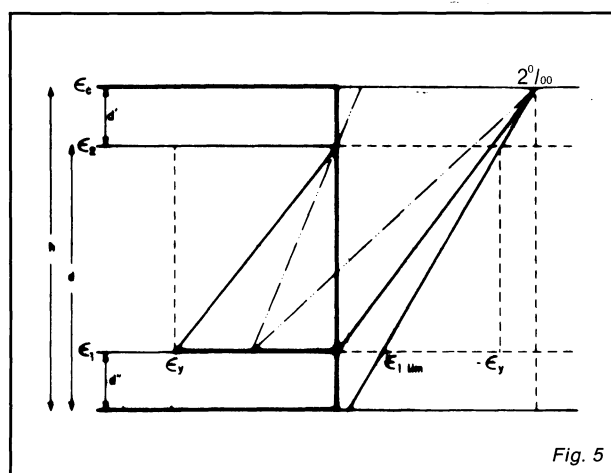


Fig. 5

Límites:

$$e_y > e_1 > 0 \quad 0 > e_2 \geq -e_{2lim1} \quad -0.002 \leq e_c < \frac{-d'}{d-d'} e_1$$

## ALGORITMO MATEMÁTICO Y APLICACIÓN INFORMÁTICA

Para resolver los diferentes sistemas de ecuaciones se ha introducido un parámetro  $t$  y una ecuación adicional, refiriendo las incógnitas a las deformaciones. Así se tiene:

- Deformación de la armadura más traccionada:  $\epsilon_1$
- Deformación de la armadura menos traccionada:  $\epsilon_2$
- Posición de la fibra neutra:  $x$

- Distancia desde el punto de tensión nula del diagrama de tensión-deformación del hormigón al punto de tensión correspondiente a la deformación del 2 por mil:  $t$

Las variables  $x$  y  $t$  dependen de  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  por lo que se considera a estas últimas como **variables independientes**, siendo las demás variables **ligadas** por medio de la ecuación de compatibilidad de deformaciones. Normalmente, para cada uno de los campos de deformación que se han definido, una

las variables independientes (que se denominará **libre**) toma valores dentro de un intervalo concreto e.  $0 < \epsilon_1 < \epsilon_y$ , mientras que la otra (que se denominará **asociada**) puede tomar valores en un intervalo cuyos límites son función de la variable libre.

El programa realiza una búsqueda de la solución mediante un barrido secuencial de todos los campos y, en cada uno de éstos, determina las combinaciones de valores de deformación de las barras que cumplen las condiciones del campo.

Dentro de cada campo, la obtención de los pares  $(\epsilon_1, \epsilon_2)$  se realiza siguiendo la secuencia de iteraciones que se describen a continuación:

Partición del intervalo de la variable libre.

Selección del primer valor (o el siguiente en su caso) de la partición.

Cálculo del intervalo en el que puede tomar valores la variable asociada.

Partición de dicho intervalo.

Selección del primer valor (o el siguiente en su caso) en esta partición.

Con el par  $(\epsilon_1, \epsilon_2)$  se procede al cálculo de  $x, t$  y de las reacciones (axil y momento respecto a la armadura más traccionada) debidas al hormigón y a las armaduras.

Comparación de los valores de las reacciones con los de las solicitaciones aplicadas.

Retorno al punto **e** hasta haber pasado por todos los valores de la partición.

Retorno al punto **b** hasta haber pasado por todos los valores de la partición de la variable libre.

Determinación, en su caso, de los nuevos valores de acotación de la solución y retorno al punto **a**.

Esta secuencia se realiza cuatro veces.

La selección de la solución más aproximada en cada campo se realiza cuando se han completado cuatro iteraciones dentro de un campo o cuando no se obtiene ninguna reducción en el intervalo de posibles valores de las variables dependientes. Esta solución provisional se incorpora en un vector solución sustituyendo a la existente, si la hubiera, siempre que su error sea menor que el de la anteriormente encontrada.

Lenguaje utilizado para la aplicación informática: QuickBASIC 4.5.

## CONCLUSIONES

- El algoritmo propuesto es una herramienta básica y eficaz para la determinación del estado de deformación y de tensión en secciones rectangulares cualesquiera, de hormigón armado, sometidas a solicitaciones normales compuestas por una fuerza axil y un momento flector.
- Una exhaustiva revisión bibliográfica y la consulta con especialistas reconocidos en el tema permite afirmar su originalidad y la utilidad del trabajo desarrollado para alcanzar un conocimiento más profundo del comportamiento de las secciones de hormigón armado bajo condiciones de carga que no produzcan el agotamiento de las mismas.
- Por el conocimiento que se tiene, tras haber rodado el programa con numerosos ejemplos en todos los campos, así como del empleo de los programas auxiliares, se constata la existencia de una relación biunívoca entre las solicitaciones normales sobre una sección rectangular y el estado de deformación que provocan en **Estados de No Agotamiento**. (Unicidad de la solución).
- El conjunto de solicitaciones normales que producen los estados de deformación de cada campo ocupan una porción de la superficie, que en unos ejes de coordenadas **N, M**, encierra la curva que define los estados límites de agotamiento de la sección. La unión de todos los campos cubre la totalidad de dicha superficie, lo que demuestra la bondad y eficacia del algoritmo matemático empleado.
- El estudio de la influencia de la variación del recubrimiento mecánico en el comportamiento de una sección rectangular del hormigón armado, aspecto de importancia notable para el análisis de la fisuración, puede ahora abordarse por medio del Programa DH desarrollado, con el fin de corroborar el modelo de cálculo empleado y su respuesta en ensayos de laboratorio.
- Como conclusión final, el autor considera que se abren nuevas vías de desarrollo de métodos de comprobación y optimización de secciones rectangulares de hormigón armado sometidas a solicitaciones normales, adecuadas para un tratamiento informatizado. El presente trabajo constituye una aportación en esta línea.

## BIBLIOGRAFÍA

(Resumen de la bibliografía listada en la Tesis)

ARIBERT, J. M.; WATTECAMPS, C. (1979). "Methode pratique commune de calcul elastique et aux etats limites ultimes des sections de Beton Arme en Flexion Simple, Composee et Deviee". **Ann Inst Tech Batim Trav Publics** n.º 374, p 93-130.

BRAGA, F.; DOLCE, M. (1980). "Grafici per la progettazione ottimale di sezioni rettangolari in C. A. sollecitate allo stato limite ultimo da sforzo normale e momento flettente". **Ind Ital Cem** v 50 n.º 7-8, p 511-520.

GARCIA MESEGUER, A. (1988). "Hormigón Armado. Cálculo en estados límites". **U.N.E.D.** Madrid.

JIMENEZ MONTOYA, P. GARCIA MESEGUER, A. MORAN, F. (1987). "Hormigón Armado, 12.ª Edición". **Gustavo Gili**. Barcelona.

MOLDES, J. (1990). "Microsoft QuickBASIC 4.5". **ANAYA**.

COMMISSION OF THE EUROPEAN COMMUNITIES. "Eurocode n.º 2. Design of Concrete Structures". 1989.

ESPAÑA. "Instrucción para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón en masa o armado. EH-88". 1988. MOPU.

\* \* \*

## publicación del ICCET/CSIC

### ALOJAMIENTO Y TECNOLOGÍA: ¿INDUSTRIALIZACIÓN ABIERTA?

**Julián Salas Serrano**

La experiencia nacional en construcción industrializada en la última década, aunque no abundante, puede resultar paralizante. Como reacción, este trabajo trata de elaborar y ordenar la información que, pegado al terreno, se ha acumulado durante los sesenta.

Auscultando tendencias avanzadas en otros países y apoyándose en nuestra realidad cotidiana, el autor de este trabajo apuesta por la industrialización, presintiendo un futuro con pocos puntos en común con lo que en general, hasta bien reciente, se ha conocido como construcción industrializada.

Se abre el trabajo con un prólogo del Profesor Ciribini en el cual, con rigor conceptual y desde su rica experiencia, analiza algunos de los conceptos más polémicos del fenómeno de industrialización del sector construcción. El autor recopila un conjunto de aportaciones de maestros de la arquitectura al lento proceso de evolución tecnológica y conceptual, continuando con un intento de respuesta realista a la interrogante que flota en el sector nacional: ¿requiem por la industrialización?

Se dedican otros capítulos a revisar lo realizado y a encarar el futuro inmediato: el concepto de componente, su repercusión económica, la dificultad del proyecto a base de productos industriales, la nueva vigencia embrionaria de la construcción por medio de catálogos, los conceptos de flexibilidad e intercambiabilidad desde una óptica práctica... Especial atención dedica este trabajo a la exposición de lo que podíamos llamar nuevos derroteros de la coordinación dimensional, aportando una visión actualizada y pragmática de los enfoques más implantados en Europa.

Las siempre problemáticas interrelaciones entre normativa, calidad e industria se detallan de forma documentada y realista. Finaliza el trabajo con unas reflexiones dirigidas al ámbito empresarial y un esbozo de «reglas de juego» que faciliten al subsector la salida del «impasse» actual.

Un volumen encuadernado en rústica, de 24 × 16,5 cm, compuesto de 160 páginas, con 109 figuras, 19 tablas y 86 referencias bibliográficas. Madrid, junio, 1981.

